ANALISI MATEMATICA I

ING. EDILE - ARCHITETTURA
prof.ssa ILARIA DEL CORSO
a.a. 2016-17

INSIEMI E LOGICA

SIMBOLI		NEGAZIONE	
insieme	A	complementare	$\bar{A}$
"per ogni"	$\forall$		$\exists$
"esiste"	$\exists$		$\forall$
"appartiene"	$\in$	"non appartiene"	$\notin$
intersezione	$\cap$		$\cup$
unione	$\cup$		$\cap$

Ω = insieme universo

$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ differenza

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ unione

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ intersezione

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ prodotto

FORMULE DI DE MORGAN

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

FUNZIONI

def. $f: X \to Y$

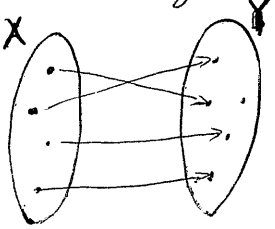
$$\forall x \in X \ \exists! \ y \in Y \text{ tale che } f(x) = y$$

Una FUNZIONE è una terna data da:

- un insieme (X) DOMINIO
- un secondo insieme (Y) CODOMINIO
- una legge (f) che ad ogni elemento del dominio associa un UNICO elemento del codominio

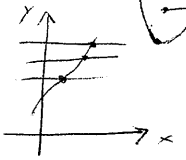
def. f si dice INIETTIVA, se "elementi distinti del dominio hanno immagini distinte nel codominio"

$$\forall x_1, x_2 \in X \ (x_1 \neq x_2) \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$



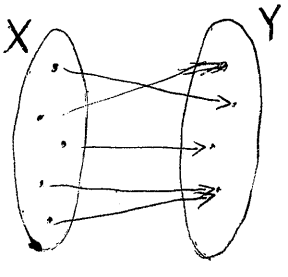
$\Downarrow$

qualsiasi retta orizzontale ($y = \lambda$) ne interseca il grafico AL PIÙ in un punto



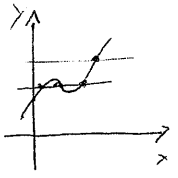
def. f si dice SURGETTIVA se "ogni elemento di Y è immagine di almeno un elemento di X"

$$\forall y \in Y \ \exists \ x \in X \text{ tale che } f(x) = y$$



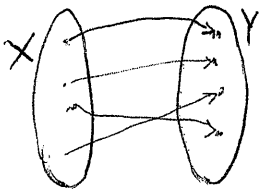
$\Downarrow$

qualsiasi retta orizzontale ($y = \lambda$) ne interseca il grafico AL MENO in un punto



def. f si dice BIUNIVOCA se è sia iniettiva sia surgettiva

$\Updownarrow$ $\boxed{\forall y \in Y \quad \exists! \, x \in X \text{ tale che } f(x) = y}$



def. f si dice INVERTIBILE se $\exists f^{-1}$ (FUNZIONE INVERSA) $: Y \to X$ tale che:

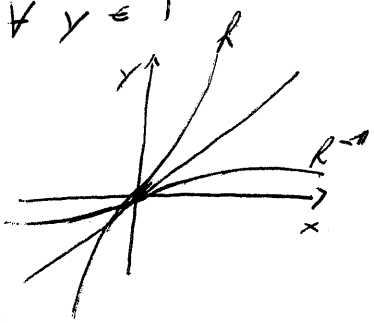
$$x \rightsquigarrow f(x) \rightsquigarrow f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x \in X$$

$$y \rightsquigarrow f(y) \rightsquigarrow f^{-1}(f(y)) = y \qquad \forall y \in Y$$

$f^{-1} \circ f = id_X$

$f \circ f^{-1} = id_Y$

simmetria rispetto a $y = x$



def COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

$X \xrightarrow{f} Y \qquad Y \xrightarrow{g} Z$

$g \circ f = g(f(x))$

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, $g \circ f$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

def. IMMAGINE di f

$f : X \to Y$

$\mathrm{Im}(f) = \{ y \in Y \mid \exists \, x \in X \text{ tale che } f(x) = y \}$

f è iniettiva $\iff f(x) = y$

def. si dice GRAFICO DI UNA FUNZIONE l'insieme $G_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$

un sottoinsieme di $X \times Y$ è grafico di una funzione se sopra ad ogni $x \in X$ c'è esattamente un punto

def. f si dice MONOTÓNA (strettamente monotona) se ha un andamento uniforme e può essere:

- CRESCENTE (strettamente crescente) $\forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ ↑
- DEBOLMENTE CRESCENTE $\forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ ↗
- DECRESCENTE (strettamente decrescente) $\forall x, y \in A \; x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ ↓
- DEBOLMENTE DECRESCENTE $\forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ ↘
- COSTANTE $\forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) = f(y)$

↳ sia debolmente crescente sia " decrescente

def $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice SIMMETRICO se $x \in A \iff -x \in A$

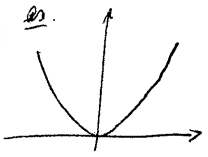
def. f si dice:

- PARI se $f(x) = f(-x)$ → simmetria rispetto all'asse y
  es. $f(x) = x^n$ con n pari
  $f(x) = \cos x$
- DISPARI se $f(x) = -f(-x)$ → simmetria rispetto all'origine
  es. $f(x) = x^n$ con n dispari
  $f(x) = \sin x$
- PERIODICA se $f(x) = f(x+T)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ dove $T>0$ è il PERIODO

rep.

- se f è monotona dello stesso tipo sugli intervalli $[a,b]$ e $[b,c]$ allora è monotona su tutto l'intervallo $[a,c]$
- f strettamente monotona $\Rightarrow$ f è iniettiva (vedi a p. 6)
- se f è monotona, non per forza è globalmente crescente o globalmente decrescente

es. $x \to x^2$



INSIEMI E LOGICA (continua)

PROPRIETÁ DI $\mathbb{R}, +, \cdot, \leq$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un CAMPO

- $+$ $\mathbb{R}$ è chiuso rispetto alla somma
  è associativa $(a+b)+c = a+(b+c)$ $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$
  $\exists$ 0 elemento neutro $a+0=a$ $\forall a \in \mathbb{R}$
  $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists$ opposto $-a$ $a+(-a)=0$
  è commutativa
- $\cdot$ $\mathbb{R}$ è chiuso rispetto al prodotto
  è associativa $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$
  $\exists$ 1 elemento neutro $a \cdot 1 = a$ $\forall a \in \mathbb{R}$
  $\forall a \neq 0$ $\exists$ a^{-1}
  è commutativa

Queste due operazioni sono legate dalla PROPRIETÁ DISTRIBUTIVA:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ è un CAMPO ORDINATO

- $a \leq a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ riflessiva
- $a \leq b$ e $a \geq b \Rightarrow a = b$ antisimmetrica
- $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ transitiva
- $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$
- $a \leq b \Rightarrow \begin{cases} ac \leq bc & \forall c \geq 0 \\ ac \geq bc & \forall c < 0 \end{cases}$

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ è un CAMPO TOTALMENTE ORDINATO

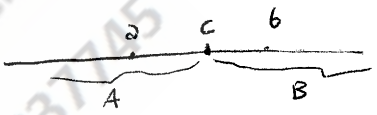
- $\mathbb{R}$ è un campo ordinato
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ si ha $a \leq b \vee b \leq a$ totalità

ASSIOMA DI DEDEKIND

$A, B \subset \mathbb{R} \quad \forall a \in A$ e $\forall b \in B$ vale $a \leq b$

allora $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq c \leq b$

c è l'ELEMENTO SEPARATORE



ASSIOMA DI ARCHIMEDE

$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a, b \geq 0$

$\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $n a > b$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

def. $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$

$m \in \mathbb{R}$ è MAGGIORANTE per A se $m \geq a \quad \forall a \in A$

prop. • $\mathbb{R}$ non ha maggiorante

• $(-\infty, 7)$ ogni numero $m \geq 7$ è un maggiorante

$M_A = \{\text{insieme dei maggioranti di } A\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$

• $\mathbb{N}$ non ha maggiorante

def. A si dice LIMITATO SUPERIORMENTE se $M_A \neq \emptyset$

def. $m \in \mathbb{R}$ si dice MASSIMO di A se:

- $m \in A$
- $m \in M_A \quad (m \geq a \quad \forall a \in A)$

prop. • $B = (-\infty, 7)$ non ha massimo, mentre $A = (-\infty, 7]$ sì $\Rightarrow \max A = 7$

• se un insieme ha massimo, questo è unico (dim $\rightarrow$ ~~trovo che~~ trovo che $m_1 = m_2$)

④ • $A \subset B$ e $\exists \max A, \max B \Rightarrow \max A \leq \max B$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

def. $A \neq \emptyset \quad A \subseteq \mathbb{R}$

$m \in \mathbb{R}$ è MINORANTE per A se $m \leq a \quad \forall a \in A$

$\mathcal{I}_A = \{$ insieme dei minoranti di $A\}$

def. A si dice LIMITATO INFERIORMENTE se $\mathcal{I}_A \neq \emptyset$

def. $m \in \mathbb{R}$ si dice ~~MASSIMO~~ MINIMO di A se

- $m \in A$
- $m \in \mathcal{I}_A \quad (m \leq a \ \forall a \in A)$ $\}\ m = \min A$

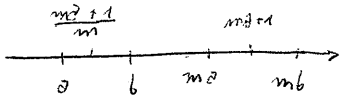
oss.
- non è detto che il minimo di A esista, ma se esiste è unico
- $\mathbb{R}$ non è limitato né sup. né inf. $\Rightarrow$ non ha né max né min
- se $\mathcal{I}_A \cap A = \emptyset$ allora A non ha minimo
- A è LIMITATO se è ha sup. che inf. limitati

[se $A \neq \emptyset$ $\Downarrow$ $\sup A$ e $\inf A$ esistono SEMPRE]

- $\boxed{\sup A = \min \mathcal{M}_A}$ (dim) → se $\lambda = \sup A \rightarrow \lambda \in \mathcal{M}_A$ ↳ λ minimo di $\mathcal{M}_A$ $\lambda \leq m \ \forall m \in \mathcal{M}_A$
- analogamente $\boxed{\inf A = \max \mathcal{I}_A}$ se A è limitato inf.
- se $\max A = m \Rightarrow m = \sup A$ (dim: $m \in A$, $m \geq a$, $m \in \mathcal{M}_A$, $m = \min \mathcal{M}_A = \sup A$)
- $A \neq \emptyset$, A limitato superiormente $\Rightarrow \exists \sup A$ (dim: $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$, $a \leq m$, ass. di Dedekind, $a \leq c \leq m$, $c = \sup A = \min \mathcal{M}_A$, $c \in \mathcal{M}_A$)
- se $A \neq \emptyset$ non è limitato sup. allora $\boxed{\sup A = +\infty}$
- se $A \neq 0 \subset \mathbb{R}$ non è limitato inf. allora $\boxed{\inf A = -\infty}$
- se A ammette minimo $\Rightarrow \inf A = \min A$
- se $x > 0 \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n} < x$ (dim: se $x > 1$ $n = 1$; se $x < 1$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $n x > 1$ (Archimede) $\rightarrow x > \frac{1}{n}$)
- $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq \frac{1}{n} \ \forall n \Rightarrow x \leq 0$ (dim: $\nexists$)
- $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, ovvero ogni intervallo (a,b) contiene infiniti numeri razionali

dim 1: $b - a > 0 \xrightarrow{\text{Archimede}} n(a-b) > 1$

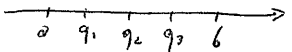
$[na] + 1 \in (na, nb) \Rightarrow \frac{[na]+1}{n} \in (a,b)$



in (a,b) ci sono un numero finito/infinito di razionali

dim 2: per ASSURDO c'è un numero finito

considero (a, q_1) → non ci dovrebbero essere razionali in (a, q_1) → contraddizione



ogni intervallo deve contenere almeno un razionale